

§ 5.1 Arbeid

Herhaling 'Momenten'

Bij een hefboom of een takel kun je volstaan met een kleinere kracht. Deze kleinere kracht moet echter wel over een grotere afstand worden uitgeoefend.

Dit algemene principe komt terug bij de belangrijke grootheid: *ARBEID* (W).

$$W_F = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

F De uitgeoefende kracht

s De afstand waarover de kracht is uitgeoefend (in meter)

α De hoek tussen de kracht en verplaatsing.

Voorbeeld:

Hoe groot is de arbeid die de spierkracht moet verrichten om een wijnvat (inhoud 200 liter) in een aanhangwagen te tillen?



- Het gevulde vat zal (ongeveer) een massa hebben van 210 kg.
- Het zwaartepunt van het vat is (ongeveer) 40 cm boven de grond.
- De hoogte van de bak is (ongeveer) 75 cm.

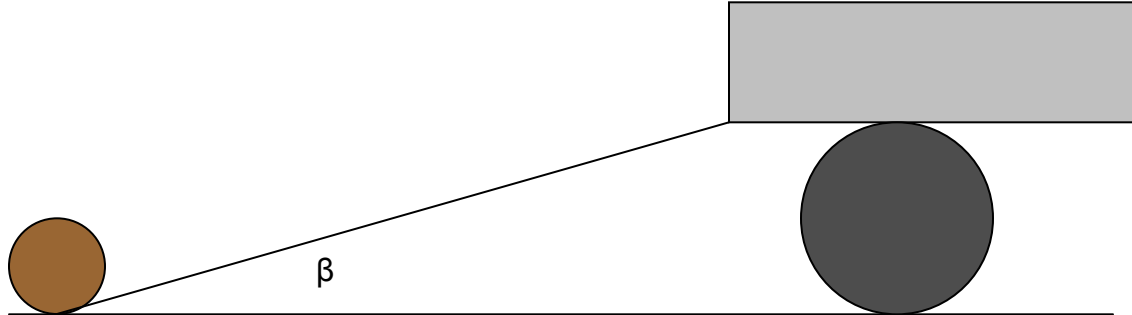
Methode 'sterke man'

Een sterke man tilt het vat gewoon 75 cm omhoog met een kracht van 2,1 kN.

$$W_F = F \cdot s \cdot \cos \alpha = 210 \cdot 9,8 \cdot 0,75 \cdot \cos(0) = 1,5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Methode 'slimme vrouw'

Een slimme vrouw gebruikt een 4,0 m lange plank om het vat langs een helling de kar in te rollen. De wrijvingskracht op het vat is te verwaarlozen.



$$\sin \beta = \frac{0,75}{4,0} \rightarrow \beta = \sin^{-1} \frac{0,75}{4,0} = 11^\circ$$

De spierkracht van de vrouw moet even groot zijn als de component van de zwaartekracht langs de helling omlaag.

$$F_{\text{spier}} = (F_{\text{zw}})_x = F_{\text{zw}} \cdot \sin \beta = 210 \cdot 9,8 \cdot \sin(11) = 3,9 \cdot 10^2 \text{ N}$$

$$W_F = F \cdot s \cdot \cos \alpha = 3,9 \cdot 10^2 \cdot 4,0 \cdot \cos(0) = 1,5 \cdot 10^3 \text{ N.m}$$

De sterke man en de slimme vrouw hebben even veel arbeid verricht!

ARBEID (W)

$$W_F = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

- F De uitgeoefende kracht
 s De afstand waarover de kracht is uitgeoefend (in meter)
 α De hoek tussen de kracht en verplaatsing.

De hoek tussen de kracht en de verplaatsing: α

- Als de kracht in de richting van de verplaatsing is, geldt: $W_F = F \cdot s$, omdat $\alpha = 0^\circ$.
- Als de kracht tegen de richting van de verplaatsing is, geldt: $W_F = -F \cdot s$, omdat $\alpha = 180^\circ$.
- Als de kracht loodrecht op de richting van de verplaatsing is, geldt: $W_F = 0$, omdat $\alpha = 90^\circ$.

Voorbeeld:

Op de slee werken vier krachten:

1. De zwaartekracht
 $\alpha = 90^\circ \rightarrow W_{zw} = 0$
2. De normaalkracht
 $\alpha = 90^\circ \rightarrow W_{norm} = 0$
3. De wrijvingskracht
 $\alpha = 180^\circ \rightarrow W_{wr} < 0$
Stel: $F_{wr} = 400 \text{ N}$ en $s = 40 \text{ m}$
 $\rightarrow W_{wr} = -16 \text{ kJ.m}$



De wrijvingskracht verricht altijd negatieve arbeid!

4. De spankracht van het touw

$$W_{span} = F_{span} \cdot s \cdot \cos \alpha = (F_{span} \cdot \cos \alpha) \cdot s = (F_{span})_x \cdot s$$

Stel: de snelheid van de slee is constant.

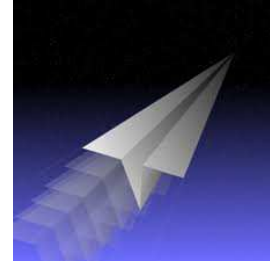
Methode 1: $F_{res} = 0 \rightarrow (F_{span})_x = 400 \text{ N} \rightarrow W_{span} = 400 \cdot 40 = 16 \text{ kJ.m}$

Methode 2¹: $\Sigma W = 0 \rightarrow W_{span} = 16 \text{ kJ.m} \rightarrow (F_{span})_x = 16 \cdot 10^3 / 40 = 400 \text{ N}$

Als de hoek tussen het touw en de richting van de verplaatsing bekend is, kan de grootte van de spankracht worden berekend. Stel: $\alpha = 29^\circ \rightarrow F_{span} = 400 / \cos(29) = 4,6 \cdot 10^2 \text{ N}$.

¹ Arbeid en kinetische energie (zie §5.3)

Arbeid verricht door de zwaartekracht



Tijdens de beweging van een voorwerp door de lucht verricht de zwaartekracht voortdurend arbeid.

- Het voorwerp beweegt horizontaal
Omdat de zwaartekracht verticaal (naar beneden) werkt, verricht de zwaartekracht geen arbeid: $\alpha = 90^\circ \rightarrow W_{zw} = F_{zw} \cdot s \cdot \cos(90) = 0$
- Het voorwerp beweegt omhoog
Omdat de zwaartekracht verticaal naar beneden werkt, verricht de zwaartekracht negatieve arbeid: $\alpha = 180^\circ \rightarrow W_{zw} = F_{zw} \cdot s \cdot \cos(180) = -F_{zw} \cdot s$
- Het voorwerp beweegt omlaag
Omdat de zwaartekracht verticaal naar beneden werkt, verricht de zwaartekracht positieve arbeid: $\alpha = 0^\circ \rightarrow W_{zw} = F_{zw} \cdot s \cdot \cos(0) = (+) F_{zw} \cdot s$

Voor de totale arbeid die de zwaartekracht verricht is uitsluitend het uiteindelijke hoogteverschil belangrijk:

$$W_{zw} = \pm F_{zw} \cdot \Delta h$$

Als het voorwerp omlaag is gegaan, heeft de zwaartekracht positieve arbeid verricht (en andersom).

Bij de arbeid verricht door de zwaartekracht is dus niet de afgelegde weg van belang, maar uitsluitend het uiteindelijke hoogteverschil.

Bij de arbeid verricht door de wrijvingskracht moet juist wel rekening worden gehouden met de totale afgelegde weg.

Arbeid verricht door een niet-constante kracht

Als de kracht niet steeds even groot is, geldt:

$$W_F = \langle F \rangle \cdot s \cdot \cos \alpha$$

De gemiddelde kracht is te bepalen in een (F,s)-diagram: 'zandbakhoogteschuifegalisatiemethode'.

Bestudeer:

blz. 234 – 240

Nuttige sommen:

2, 4, 5, 6, 7

§ 5.2 – § 5.4 **Arbeid en energie**

Als er arbeid wordt verricht, wordt er energie omgezet en/of overgedragen. Maar ook omgekeerd: om energie om te zetten en/of over te dragen is er een kracht nodig die arbeid verricht.

- Energie omzetten: van ene energiesoort → andere energiesoort.
- Energie overdragen: energie van ene voorwerp → andere voorwerp.

De grond heeft geen energie nodig om een koffer te tillen, omdat de normaalkracht geen arbeid verricht. Een mens heeft wel energie nodig om de koffer vast te houden, omdat spierkracht ook bij statische belasting arbeid verricht.



Arbeid en energie hebben (uiteraard) dezelfde eenheid: joule ($J = N \cdot m$).

Er zijn verschillende energiesoorten:

1. **Kinetische energie (bewegingsenergie)**

Een bewegend voorwerp heeft kinetische energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

2. **Potentiële energie**

Een voorwerp kan energie bezitten t.g.v. zijn plaats in een 'krachtenveld'.

Bijvoorbeeld:

Zwaarte-energie

Een voorwerp boven de 'grond' heeft zwaarte-energie: $E_{zw} = m \cdot g \cdot h$

Veerenergie

Een ingedrukte (uitgerekte) 'veer' heeft veerenergie: $E_{veer} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2$

Chemische energie

In voedingsstoffen of brandstoffen zit chemische energie opgeslagen.

Door verbranding komt deze energie vrij.

Een deel van de vrijgekomen energie wordt gebruikt om arbeid te verrichten. Het resterende deel wordt omgezet in warmte.

3. **Warmte Q**

In de 19^e eeuw werd duidelijk dat warmte een energiesoort is die van hoge temperatuur naar lage temperatuur gaat.

Warmte is de energiesoort die ontstaat als wrijving arbeid verricht.

De Wet van Behoud van Energie (WvBvE)

De behoudswet van energie stelt dat de totale hoeveelheid energie (in een geïsoleerd systeem) constant is.

Het is belangrijk om rekening te houden met alle energiesoorten.

Op de kinetische energie na, hebben alle energiesoorten direct iets te maken met arbeid verricht door een kracht.

- Zwaarte-energie en zwaartekracht: $W_{zw} = -\Delta E_{zw}$

Bijvoorbeeld:

Een pen (massa 80 gram) valt van een 70 cm hoge tafel op de grond.

$$W_{zw} = + F_{zw} \cdot \Delta h = 0,080 \cdot 9,8 \cdot 0,70 = 0,55 \text{ J}$$

Maar ook: de zwaarte-energie van de pen is 0,55 J kleiner geworden.

- Veerenergie en veerkracht: $W_{veer} = -\Delta E_{veer}$

Bijvoorbeeld:

Een onbelaste veer ($C = 12 \text{ N/cm}$) wordt 5,0 cm ingedrukt.

$$W_{veer} = - \left\langle F_{veer} \right\rangle \cdot s = - \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 0,050 \cdot 0,050 = -1,5 \text{ J}$$

Maar ook: de veerenergie is 1,5 J groter geworden.

- Warmte en wrijvingskracht: $|W_{wr}| = Q$

Bijvoorbeeld:

Een auto rijdt 400 m. Er werkt een (constante) wrijvingskracht van 300 N.

$$W_{wr} = - F_{wr} \cdot s = - 300 \cdot 400 = -120 \text{ kJ}$$

Maar ook: er is 120 kJ warmte ontstaan.

De Wet van Behoud van Energie is daarom ook in een andere vorm te schrijven:

$$\Sigma W_{op} = \Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{eind}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{begin}^2$$

De kinetische energie van een voorwerp neemt toe, als er per saldo positieve arbeid op het voorwerp wordt verricht (en omgekeerd).

Bestudeer:

blz. 251 – 256

Nuttige sommen:

9, 12, 15, 19, 20, 21², 22³

² Zie uitwerking op de volgende bladzijde van deze moeilijke som

³ Zie uitwerking twee bladzijden verder

Uitwerking som 21

Er zijn drie krachten die tijdens de oversteek arbeid verrichten:

1. $W_{spier} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ J}$
2. $W_{wr} = -0,30 \cdot 10^3 \text{ J}$
3. De zwaartekracht op Joep verricht (positieve) arbeid:
 $W_{zw} = +F_{zw} \cdot \Delta h = 96 \cdot 9,8 \cdot 5,0 = 4,7 \cdot 10^3 \text{ J}$

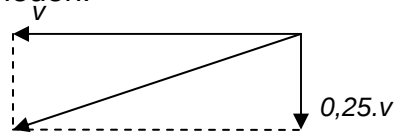
De toename van de kinetische energie is dus $6,6 \cdot 10^3 \text{ J}$. Omdat de beginsnelheid nul is, is de kinetische energie aan het einde van de oversteek dus $6,6 \cdot 10^3 \text{ J}$.

De eindsnelheid v van de kar en Marenca is onbekend.

De eindsnelheid van Joep is naar voren én naar beneden.

De grootte van de eindsnelheid van Joep is:

$$\sqrt{v^2 + (0,25 \cdot v)^2} = \sqrt{17/16 \cdot v^2} = \sqrt{17/16} \cdot v$$



Zowel de kar met Marenca als Joep hebben op het laatst kinetische energie.

Voor de kar met Marenca geldt: $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 53 \cdot v^2$

Terwijl voor Joep geldt: $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 48 \cdot \frac{17}{16} v^2 = 51 \cdot v^2$

Bij elkaar opgeteld moet dit dus $6,6 \cdot 10^3$ zijn, zodat:

$$53 \cdot v^2 + 51 \cdot v^2 = 104 \cdot v^2 = 6,6 \cdot 10^3 \rightarrow v = \sqrt{\frac{6,6 \cdot 10^3}{104}} = 8,0 \text{ m/s}$$

Alternatieve methode:

De kinetische energie aan het einde van de oversteek is de som van de kinetische energie van de horizontale beweging én van de verticale beweging.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m_{totaal} \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m_{Joep} \cdot (0,25 \cdot v)^2 = 101 \cdot v^2 + 3 \cdot v^2 = 104 \cdot v^2$$

Uitwerking som 22

Methode 1 (Hoofdstuk 2, 3 en 4)

Aanname: de beweging is eenparig vertraagd.

$$\langle v \rangle = \frac{v_{begin} + v_{eind}}{2} = \frac{120/3,6 + 80/3,6}{2} = 27,8 \text{ m/s}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\langle v \rangle} = \frac{100}{27,8} = 3,6 \text{ s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{eind} - v_{begin}}{\Delta t} = \frac{80/3,6 - 120/3,6}{3,6} = -3,1 \text{ m/s}^2$$

$$F_{res} = m \cdot a = 980 \cdot (-)3,1 = (-) 3,0 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Dit betekent dat de 'touwtrekwedstrijd' tussen de zwaartekracht langs de helling omlaag én de remkracht (wrijvingskracht) langs de helling omhoog door de remkracht wordt gewonnen met $3,0 \cdot 10^3 \text{ N}$.

$$(F_{zw})_x = F_{zw} \cdot \sin \alpha = 980 \cdot 9,8 \cdot \sin 10^\circ = 1,7 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$\rightarrow F_{wr} = F_{res} + (F_{zw})_x = 3,0 \cdot 10^3 + 1,7 \cdot 10^3 = 4,7 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Methode 2 (Hoofdstuk 5)

Er zijn twee krachten die tijdens het remmen arbeid verrichten:

1. De wrijvingskracht (remkracht); deze kracht verricht negatieve arbeid.
2. De zwaartekracht verricht (positieve) arbeid:

$$W_{zw} = +F_{zw} \cdot \Delta h = 980 \cdot 9,8 \cdot 100 \cdot \sin 10^\circ = 1,7 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Het resultaat is een afname van de kinetische energie:

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{eind}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{begin}^2 = \frac{1}{2} \cdot 980 \cdot \left(\frac{80}{3,6}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot 980 \cdot \left(\frac{120}{3,6}\right)^2 = -3,0 \cdot 10^5 \text{ J}$$

De arbeid van de wrijvingskracht moet dus $-3,0 \cdot 10^5 - 1,7 \cdot 10^5 = -4,7 \cdot 10^5 \text{ J}$ zijn.

$$\rightarrow F_{wr} = \frac{W_{wr}}{s \cdot \cos 180^\circ} = \frac{-4,7 \cdot 10^5}{100 \cdot -1} = 4,7 \cdot 10^3 \text{ N}$$

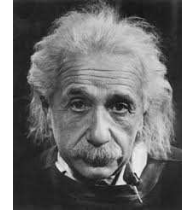
Wat als de Wet van Behoud van Energie niet lijkt te kloppen?

1. Lange tijd is niet begrepen waar de energie vandaan komt die sterren (zoals de zon) uitstralen. De bron van deze energie bleek onmogelijk chemische energie of zwaarte-energie te kunnen zijn.

Einstein maakte in 1905 duidelijk dat massa een

verschijningsvorm van energie is: $E = m \cdot c^2$.

De Wet van Behoud van Energie klopt ook voor sterren; sterren worden lichter en stralen daardoor energie uit.

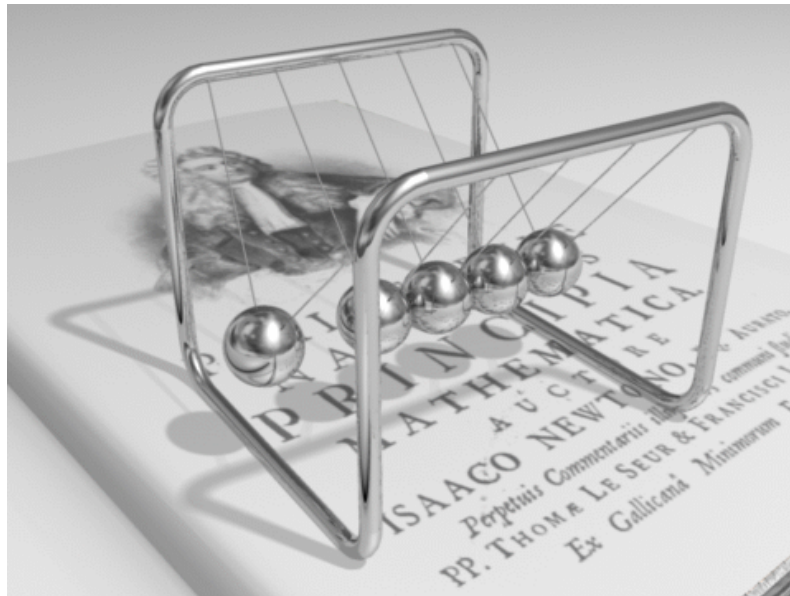


2. Bij bepaalde radioactieve reacties (β -verval) leek energie te verdwijnen. Pauli stelde in 1931 dat er bij deze vervalreacties blijkbaar een deeltje ontstond, dat (nog) niet kon worden waargenomen, maar dat wel een hoeveelheid energie bezat. Dit deeltje kreeg later de naam neutrino. Zie: <http://www.kennislink.nl/web/show?id=127204>



Wat als de Wet van Behoud van Energie in jouw som niet klopt?

Het meest waarschijnlijk is dat je een energiesoort vergeet.



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e8/Newtons_cradle_animation_book.gif

Bij de omzetting van zwaarte-energie in kinetische energie in 'veerenergie' in kinetische energie in zwaarte-energie enzovoort, lijkt er energie te verdwijnen. De beweging stopt namelijk in werkelijkheid na enige tijd. Blijkbaar wordt er energie omgezet in geluid en warmte.

Geldt de Wet van Behoud van Energie altijd?

De natuurkundige denkt (voorlopig) van wel⁴. Echter:

Heisenberg formuleerde in 1927 de onzekerheidsrelatie $(\Delta E) \cdot (\Delta t) \approx h$

In de klassieke natuurkunde kunnen we nooit de totale hoeveelheid energie veranderen zonder de Wet van Behoud van Energie te overtreden.



In de quantummechanica⁵ geldt dat een tijdsonzekerheid Δt betekent dat we de energie niet nauwkeuriger kunnen weten dan $(\Delta E) \approx h / (\Delta t)$. De consequentie is dat we een hoeveelheid energie ΔE kunnen 'lenen', mits we dit binnen $(\Delta t) \approx h / (\Delta E)$ 'terugbetalen'.

Bestudeer:

blz. 263 – 270

Nuttige sommen:

26, 27, 29, 30, 32

Toelichting bij som 26:

De warmte die is ontstaan tijdens de beweging van A naar B is

$$Q = |W_{wr}| = F_{wr} \cdot s = 0,015 \cdot \text{cirkelboog } AB$$

De afname van de zwaarte-energie is

$$m \cdot g \cdot \Delta h = 0,031 \cdot 9,8 \cdot \text{hoogteverschil } AB$$

Zie verder voorbeeld 4 (boek bladzijde 268 – 270).

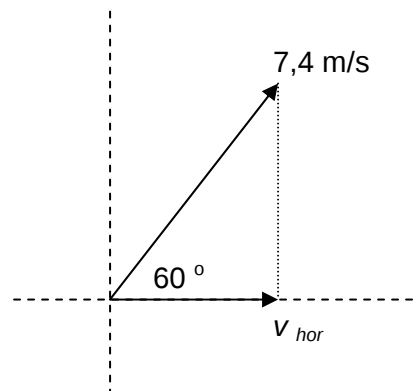
Toelichting bij som 27b:

Omdat er op de bal geen wrijvingskracht werkt, blijft de horizontale snelheid van de bal constant.

Deze horizontale snelheid v_{hor} is te berekenen.

De bal wordt immers weggegooid met een snelheid van 7,4 m/s onder een hoek van 60° .

Zie verder voorbeeld 3 (boek bladzijde 266 – 267).



Som 32 wordt klassikaal besproken.

⁴ De 'WvBvE' is een gevolg van het feit dat natuurwetten in de loop van de tijd niet (?) veranderen (Emmy Noether, 1918)

⁵ Zie bijvoorbeeld: *The New Quantum Universe*; Hey & Walters; ISBN: 0 521 56457 3

§ 5.5 Vermogen en rendement

Het vermogen:

- De arbeid die een kracht per seconde verricht of
- De energie die een apparaat per seconde omzet

De eenheid van vermogen is dus J/s = W(att).

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Het vermogen van de motorkracht:

Als het voertuig een constante snelheid heeft, geldt⁶:

$$P = F_{motor} \cdot v$$

Rendement:

In een apparaat wordt energie omgezet in een gewenste (nuttige) soort. Het rendement van het apparaat geeft aan hoe efficiënt dit gebeurt.

$$\eta = \frac{E_{nuttig}}{E_{in}} \cdot 100 \%$$

oftewel per seconde

$$\eta = \frac{P_{nuttig}}{P_{in}} \cdot 100 \%$$

De hoeveelheid energie die (bijvoorbeeld per seconde) door het apparaat wordt opgenomen

100 %

Apparaat

De hoeveelheid energie die (in dezelfde tijd) wordt omgezet in de gewenste ('nuttige') energiesoort

De hoeveelheid energie die (in dezelfde tijd) wordt omgezet in ongewenste energiesoorten ('verlies')

Bestudeer:

voorbeelden op blz. 279 + 281

Nuttige sommen:

38, 39, 40, 42, 44⁷

⁶ Bewijs: Zie bladzijde 279 (boek)

⁷ Zie uitwerking op de volgende bladzijde

Uitwerking som 44

Onderdeel a⁸

Bij een snelheid van 90 km/h (= 25 m/s) verbruikt de auto 6,0 liter benzine om 100 km af te leggen (zie diagram autotest).

De auto heeft hiervoor (bij deze snelheid) $\Delta t = \frac{s}{v} = \frac{100 \cdot 10^3}{25} = 4,0 \cdot 10^3 \text{ s}$ nodig.

Het benzineverbruik is dus per seconde $1,5 \cdot 10^{-3}$ liter.

Onderdeel b

Het opgenomen vermogen is hoeveel energie er per seconde de motor ingaat.

Dus: $33 \cdot 10^6 \text{ (J/liter)} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ (liter/s)} = 50 \cdot 10^3 \text{ J/s} = 50 \text{ kW}$.

Onderdeel c

Informatie uit testrapport:

- Bij de topsnelheid (180 km/h = 50,0 m/s) verbruikt de auto 16,0 liter benzine om 100 km af te leggen.
- Het nuttig geleverde topvermogen is 76 kW.

Het benzineverbruik bij de topsnelheid is $8,0 \cdot 10^{-3}$ liter/s; er is nu immers $2,0 \cdot 10^3 \text{ s}$ nodig om 100 km af te leggen.

Het opgenomen vermogen is nu dus: $33 \cdot 10^6 \text{ (J/liter)} \cdot 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ (liter/s)} = 0,26 \text{ MW}$.

$$\Rightarrow \eta = \frac{P_{\text{nuttig}}}{P_{\text{in}}} \cdot 100 \% = \frac{76 \cdot 10^3}{0,26 \cdot 10^6} \cdot 100 \% = 29 \%$$

Extra onderdeel

Bereken de totale wrijvingskracht op de auto bij deze (top)snelheid.

Het nuttig geleverde vermogen is de hoeveelheid arbeid die de motorkracht per seconde verricht.

$$P_{\text{motor}} = F_{\text{motor}} \cdot v \Rightarrow F_{\text{motor}} = \frac{P_{\text{motor}}}{v} = \frac{76 \cdot 10^3}{50} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Omdat de snelheid van de auto constant is, moeten de krachten op de auto elkaar opheffen. De wrijvingskracht op de auto is bij deze snelheid dus 1,5 kN.

§ 5.6 Toepassingen in het dagelijks leven

Bestudeer:

blz. 286 – 295

Nuttige sommen:

47, 51 t/m 56

⁸ De opdracht is 'Toon aan'; je moet het antwoord dus later in de opgave gebruiken!